Evaluación de la función error

M.Sc. Yuri Morales L.
Escuela de Matemática,
Universidad Nacional de Costa Rica
ymorales@una.ac.cr

Resumen

El objetivo de este documento es poner en evidencia el fundamento matemático involucrado en la aproximación de la función error. Una propuesta diseñada bajo aproximaciones a las series de potencias, la aproximación del número π por Gauss y la aproximación a la raíz cuadrada por el método numérico de Newton - Raphson.

Abstract

The objective of this document is to put in evidence the mathematical foundation involved in the approach of the function error. A proposal designed under approaches to the series of powers, the approach of the Pi number by Gauss and the approach to the square root by the numerical method of Newton - Raphson.

Palabras claves:Aproximaciones, series, resolución de problemas, Número Pi, análisis numérico.

Introducción

En la actualidad, muchas de las operaciones que se realizan con la computadora se basan en un programa que facilite los cálculos de ciertas funciones. Muchas veces se utiliza la computadora para hacer un cálculo numérico, una integración o una serie. Cuando se realizan cálculos con estas herramientas se debe tener claro que la ayuda que pueda proporcionar es, en muchas ocasiones, con el objetivo de simplificar la cantidad de procedimientos que se deben efectuar.

El Cálculo es un área que está estrechamente ligada al uso de programas computacionales. Hoy existen algunos programas(paquetes) como Mathematica 6, Derive, entre otros, que calculan derivadas, integrales, grafican, estudian convergencia y divergencia, y estos, son de mucha utilidad en la solución de problemas de áreas como informática y muchas otras ingenierías.

Uno de los factores predominantes en el uso de las herramientas digitales, es su formulación. De esta manera, el docente se enfrenta a un gran reto: motivar el uso de nuevas tecnologías a la vez que su utilidad represente una ayuda y no una forma de apartarse de la construcción de conocimiento.

Es evidente que los estudiantes deben tener claro cuál es el desafío propuesto en un problema, para decidir utilizar un software de apoyo. En el caso de los estudiantes de enseñanza de la matemática se espera que no solo puedan decidir utilizarla, sino que comprenda muchos de los métodos que utiliza la herramienta y puedan ser descritos con un fundamento en resultados matemáticos.

Por esta razón, se ha seleccionado la evaluación de la función error como un ejemplo de las bases teóricas que fundamentan su cálculo en un software específico.

$$\text{Función error: } E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

El objetivo de este documento es mostrar los fundamentos en cálculo, cálculo numérico, teorías de la propagación del error, procesos matemáticos recursivos, entre otros, para la aproximación con un x dado.

El trabajo entonces es construir un modelo de evaluación bajo procesos recursivos con fundamento matemático. Para esto, se dividirá el objetivo en 4 grandes funciones matemáticas recursivas:

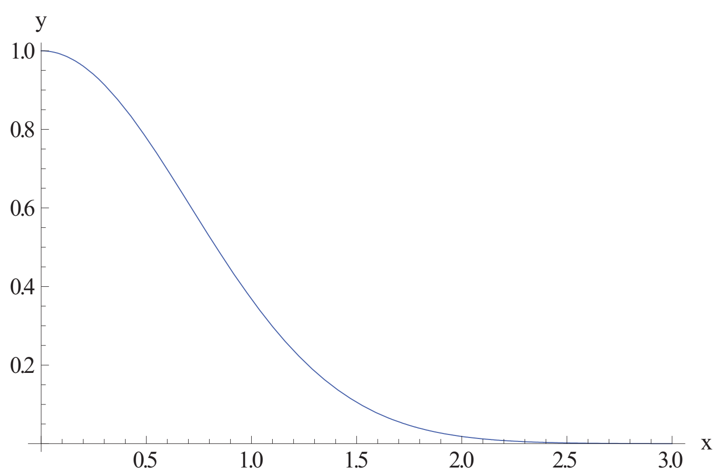
1. Una aproximación a $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ por medio de series de potencias.
2. Una aproximación a π por medio de la serie $\tan^{-1}$ de Gauss.
3. Una aproximación a la raíz cuadrada por el método de Newton - Raphson.
4. Una aproximación a ciertas cifras significativas con elementos básicos sobre la teoría de la propagación del error.

1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

1.1.1 Acercamiento a la integración de la serie.

El primer punto es resolver $\int_0^x e^{-t^2}dt$. En la resolución de la serie que representa la integral se debe considerar un residuo que aproxima el error cometido para cierta cantidad n de evaluaciones. Al final de la justificación teórica se ofrecen los principales indicios del cálculo del error cometido.

Para tener una idea general del problema 1 se puede realizar una gráfica que represente $f(x) = e^{-x^2}$ se toma $x \in [0,3]$



Respecto a la representación, no es casualidad que la gráfica se asemeje a una media campana de Gauss; más adelante se retomará esto.

Para resolver esta aproximación se utiliza la integración parte por parte de la serie; es decir, tomando como base:

$$e^x = \mathbf{1} + x + \frac{x^2}{\mathbf{2}!} + ... + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ donde el radio de convergencia es $\mathbb{R}$.

Haciendo una sustitución, $x \to -x^2$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

Se tiene que

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{n!}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + ... \quad (1)$$

El resultado (1) es suficiente para establecer un proceso recursivo; basta mostrar el error cometido al aproximar el valor de una función de este tipo a n evaluaciones.
En virtud del límite del error de los polinomios de Taylor y adecuándolo a las series de Maclaurin se tiene que el error cometido $\left|\overset{0}{R_n}\right|$ se puede acotar con

$$|R_n| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| M \qquad (1.1)$$

Donde M es un número positivo no más pequeño que la mayor evaluación hecha. Se debe mencionar que $f(x) = e^{-x^2}$ se considera una función analítica y continua puesto que, en un punto ξ, la vencidad $|x-\xi| < R$ permite que f sea expresable como una serie de Taylor y, en particular, para $\xi = 0$ (serie de Maclaurin) con un radio de convergencia R, se tiene que el *resto o error resultante* es:

$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi+\theta(x-\xi))}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$, de lo que obtiene que,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

Análogamente, se utilizarán estas consideraciones dentro de las aproximaciones que generen un resto o error resultante mediante una serie de Taylor o Maclaurin.

1.2 APROXIMACIÓN DE π

En esta sección se estudia la base que fundamenta las posibles aproximaciones a π mediante una solución para el cómputo de esta función.

Para realizar una aproximación a π es muy conveniente trabajar con $tan^{-1}(x)$ pues esta se puede expresar como una serie. Se recuerda que se busca un método recursivo, por lo cual, el trabajo con n procedimientos es muy eficiente.

Partiendo de la función racional $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \cdot x^{2n}\right]$ con radio de convergencia $|x| \leq 1$ y sabiendo que f es integrable en cada sub-intervalo cerrado, se tiene que $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\right]$ en el intervalo de convergencia $]-R,R[$, entonces:

$$\tan^{-1} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \tag{1.2}$$

Cuando $x = 1$ en (1.2) se obtiene la aproximación expuesta por Leibniz

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \ldots + \frac{1^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right)$$

Muchos autores de libros para la enseñanza del cálculo concuerdan en que la aproximación por medio de la serie de Leibniz es un excelente resultado teórico pero, en la realidad, esta es prácticamente inservible para aproximar a π. Simmons (2002), Thomas (1998), Stewart (2002), Smith E. *et al* (1947). Esto se debe, además, a la lenta convergencia de la serie. En este sentido, Lampret (2006) opina que esta serie es *"no apta"* p.22 para el cálculo de π y ofrece una modificación mediante una transformación de la serie con la fórmula de Euler - Maclaurin.

En 1996, Bailey del Centro de Investigación AMES de la NASA (La Administración Nacional para la Aeronáutica y el Espacio) en California, junto a Borwein J, Borwein P y Plouffe de la Universidad de Simon Fraser en Canadá, construyeron un reporte técnico para la NAS (*NASA Advanced Supercomputing*) en el cual explican varias de las limitantes de esta aproximación para su uso práctico y consideran otros modelos.

Dado lo anterior, otro resultado que se puede utilizar es la aproximación realizada por John Machin, en 1706. Este resultado difiere, en términos de convergencia, con el de Leibniz en que converge muy rápidamente.

Por ejemplo, en un proceso recursivo dado, el resultado de Machin aproxima 66 cifras significativas de π en $n = 100$, mientras que, para la misma cantidad de procedimientos, el método expresado por Leibniz solo alcanza 5 cifras significativas. La aproximación por John Machin, en 1706 es

$$\pi = 4 \cdot \left(\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \right) \right).$$

Existen múltiples formas de aproximar a π. A continuación se resumen los principales resultados (Tabla 1.2).

Una parte importante dentro de los procesos es una adecuada escogencia del modelo a desarrollar. A continuación, en la tabla 1.2, se realiza una comparación entre 5 de los procesos descritos anteriormente, con el fin de conseguir 10 cifras significativas mediante una técnica recursiva.

Como se nota en la tabla 1.2, el método que más rápido se aproxima a la cantidad deseada es el de Gauss. Por esta razón se toma este acercamiento para ser descrito de una forma recursiva.

Se debe hacer distinguir que,

Tabla 1.1 Modelo de cálculo por sus respectivos proponentes

	Modelo de cálculo	Autor,Año
1	$\pi = 2 \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} \right)$	John Wallis, 1665
2	$\pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \right]$	Leibniz, 1674
3	$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]$	Gregory, 1671
4	$\pi = 4 \cdot \left(4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \right)$	John Machin, 1706
5	$\pi = 4 \cdot \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \right)$	John Machin, 1738
6	$\pi = 4 \cdot \left(5 \cdot \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{3}{79}\right) \right)$	Euler, 1764
7	$\pi = 4 \cdot \left(2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \right)$	Hermann, 1776
8	$\pi = 4 \cdot \left(2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \right)$	Hutton, 1776
9	$\pi = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$	Strassnitzky, 1844
10	$\pi = 48 \cdot \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \cdot \arctan\left(\frac{1}{57}\right) - \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$	Gauss (1777-1855)
11	$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cdot (6n)!(13591409 + 54140134n)}{(3n)! \cdot n!^3 (640320)^{3n+3/2}} \right]$	Hermanos Chudnovsky, 1988

Fuente: extracto de *El número Pi, Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (2007)*

1. El modelo 2 no se estudió pues, con $n = 100$ apenas alcanzaba 5 cifras significativas y para alcanzar la séptima cifra se necesita $n = 19000000$.

2. Excepto el modelo 11, todos lo que no se tomaron en cuenta tienen una convergencia muy parecida a alguno de los que sí están considerados en la tabla 1.2. Por ejemplo, el modelo de Wallis tiene una velocidad menor de convergencia que el de Leibniz.

3. El modelo 10 se seleccionó por afinidad, pero el modelo 11 es muy superior en términos de convergencia. Agrega 14 cifras significativas por cada n evaluada.

Para finalizar este problema, basta con definir los errores cometidos. Al igual que en el problema anterior:

Tabla 1.2 Cantidad de procesos recursivos y el valor de n necesario para que cada modelo aproxime con 10 cifras significativas.

Modelo de cálculo	Cantidad de procesos recursivos	n
2	No explorado	No explorado
4	277	7
5	843	15
8	345	9
10	94	3

$|R_n| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| M,$ por lo tanto, para cada uno de los tres sumandos se genera un error de:

$$\left|\overset{1}{R_n}\right| \leq \left|\frac{\left(\frac{1}{18}\right)^n}{n!}\right| M \ , \ \left|\overset{2}{R_n}\right| \leq \left|\frac{\left(\frac{1}{57}\right)^n}{n!}\right| M \ , \ \left|\overset{3}{R_n}\right| \leq \left|\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^n}{n!}\right| M$$

1.3 TEORÍA DE PROPAGACIONES DE ERROR

Respecto al cálculo de los errores o residuos anteriores, la teoría de la propagación del error afirma que el error de una suma es la suma de los errores cometidos y la multiplicación de una constante m propaga el error m veces con $m \geq 1$.
Por lo tanto el error total cometido en la aproximación de π viene dado por:

$$\left|\overset{\pi}{R_n}\right| \leq 48\left|\overset{1}{R_n}\right| + 32\left|\overset{2}{R_n}\right| - 20\left|\overset{3}{R_n}\right|$$

1.4 APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA

Para la solución de la raíz cuadrada, se selecciona el método de Newton - Raphson con el fin de completar el problema planteado.
La raíz cuadrada de un número real positivo es la raíz positiva de $x^2 - a = 0$. Utilizando el resultado mencionado, se tiene que la descripción de un proceso recursivo es:

1. $x_0 = 1$ como valor inicial o condición de terminación del proceso.
2. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

Con esto, se concluye todos los procesos recursivos que son necesarios y basta con decir que el error que genera en el cálculo viene dado por

$\left|\overset{\surd}{R_n}\right| = \left|y - x_{n+1}^2\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ Donde d representa la cantidad de dígitos significativos deseados.

1.5 ERROR TOTAL

El error total cometido en la aproximación de $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ viene dado por las siguientes condiciones:

1. Se sabe que la raíz $\sqrt{x}m$ propaga un error de $\frac{1}{m} \cdot x$
2. El error del numerador de la función error estadístico viene dado por $2 \cdot \left|\overset{0}{R_n}\right|$
3. El error cometido en el denominador es $\frac{1}{2} \cdot \left|\overset{\pi}{R_n}\right|$

Dadas estas condiciones el error total es:

$$|\varepsilon| = \frac{2 \cdot \left|\overset{0}{R_n}\right|}{\frac{1}{2} \cdot \left|\overset{\pi}{R_n}\right|} = 4 \cdot \left(\frac{\left|\overset{0}{R_n}\right|}{\left|\overset{\pi}{R_n}\right|} \right)$$

1.6 PROCESOS RECURSIVOS MATEMÁTICOS

Dentro de los elementos que se desarrollan en la implementación de estos conceptos se toma en cuenta la definición expuesta por Morales (2008) y se implementa en el lenguaje Scheme (DrScheme 3.07). Este se utiliza por su estructura de lenguaje funcional que permite efectuar funciones cuya definición es típicamente recursiva. Dentro del documento mencionado se puede encontrar el desarrollo de estos temas.

Descripción de los procesos:

1.6.1 El proceso factorial

Como un proceso definido recursivamente, se puede decir que:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n(n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Al desarrollar este proceso recursivo en el lenguaje mencionado se tiene:

```
(define (factorial n)
  (cond ( (= n 0) 1)
      (else (* n (factorial (- n 1))))))
```

1.6.2 El proceso de "elevar a la n"

Se puede describir el proceso de elevar un número a una potencia n donde $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \;\; \text{y} \;\; x \neq 0. \\ x \cdot x^{(n-1)!} & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Se considera que no es necesaria la validación de casos como 0^0 pues se implementa un desarrollo que obliga una condición de terminación distinta al caso mencionado. El código es:

```
(define (elevar x n)
  (cond ( (= 0 n) 1)
      (else (* x (elevar x (- n 1)))))))
```

1.6.3 Cálculo del arcotangente

Tomando en cuenta el resultado (3) se tiene que:

$$\tan^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } i = 0 \\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dfrac{x^{2i+1}}{2i+1} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

Donde i varía de forma recursiva en dependencia de n; de esta manera la propuesta es:

```
(define (arcotan x n)
  (cond ((= n 0) x)
   (else (+ (/ (* (elevar -1 n) (elevar x (+ (* 2 n) 1))) (+ (* 2 n) 1)) (arcotan x (- n 1))))))
```

La función acepta un n adecuado para la aproximación a un error dado.

1.6.4 La implementación de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{n!} \partial t$

Por el resultado expuesto en (1) se tiene que se puede definir de manera recursiva el proceso $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{2! \cdot 5} - \dfrac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots$ por:

$$\int_0^x e^{-t^2}\partial t = \begin{cases} x & \text{si } i=0 \\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dfrac{x^{2i+1}}{i!(2i+1)} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

De esta manera se tiene que la estrategia recursiva es:

```
(define (et2 x n)
    (cond ((= n 0) x)
      (else (+ (/ (* (elevar -1 n) (elevar x (+ (* 2 n) 1))) (* (factorial n) (+ (* 2 n) 1))) (et2 x (- n 1))))))
```

En este argumento se solicita una cantidad n de procesos que defina la aproximación de cifras significativas. Esto se realiza bajo las condiciones de error cometido en el cálculo.

1.6.5 Acercamiento a π

Dado el método de Gauss se puede establecer que:

```
(define (pi n)
   (- (+ (* 48 (arcotan (/ 1 18) n)) ( * 32 (arcotan (/ 1 57) n)) ) (* 20 (arcotan (/ 1 239) n)) ))
```

1.6.6 Aproximación a la raíz

En la propuesta teórica de método se propuso un algoritmo que es factible para aplicar un proceso recursivo:

```
(define (new-rap y)
  (newaux y 1.7724 ))
(define (newaux y ap)
  (cond (
      ( <= (abs (- y (elevar ap 2) )) 1e-10 ) ap)
     (else
       (newaux y (* (/ 1 2) (+ ap (/ y ap)))))))
```

En este caso se debe considerar que se envía una propuesta de 10 cifras significativas a la raíz y se asume un valor inicial de 1.7724 con el fin de mejorar la velocidad con que se calcula la recursión de Newton - Raphson.

1.6.7 La función error

Ya desarrollados las recursiones anteriores, la función error $E(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ es sumamente sencilla de implementar. Se ofrece una propuesta para 18 dígitos significativos la cual dura en procesar 0.03 segundos.

```
(define (F_error x)
    (/ (* 2 (et2 x 48 )) (new-rap (pi 40))))
```

1.7 APLICACIÓN

Entre las aplicaciones más conocidas de la función error se encuentra el cálculo de la distribución normal acumulada (DNA). Puesto que la distribución normal acumulada es:

$$\mathrm{DNA} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \text{ con media } \mu \text{ y desviación estándar } \sigma.$$

Si se hace que $\mu = 0$, entonces se obtiene que $\mathrm{DNA} = \frac{1}{2}\left(1 + F_{error}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$ se obtiene una aproximación del acumulado normal estándar mediante la función error y su implementación en el lenguaje utilizado es bastante útil para un cálculo con cierta cantidad de cifras significativas.

1. Distribución normal acumulada para $X < z$ con varianza d

$$\frac{1}{2}\left(1 + F_{error}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

```
(* (/ 1 2) (+ 1 (Ex (/ x (* d (new-rap 2)))))))
```

2. Distribución normal acumulada para $X > z$ con varianza d

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 + F_{error}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

3. Distribución normal acumulada para $|X| > z$ con varianza d

$$\left(1 + F_{error}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

```
(define (dist_normal_acumulada3 x d)
(* 2 (dist_normal_acumulada1 x d)))
```

Por último se puede mencionar que en el caso de se obtiene la distribución normal estándar acumulada con la cantidad de cifras significativas deseadas.

1.8 CONCLUSIONES

El trabajo matemático tiene muchas aristas. En particular el estudio de series y sucesiones para la resolución de problemas es un área fundamental, tanto para futuros matemáticos y docentes en el área como para estudiantes de áreas relacionadas a la ingeniería o estadística.

Como es de esperar, la teoría matemática en todos los campos mencionados (cálculo infinitesimal, cálculo numérico, métodos numéricos, matemáticas discretas, entre otros) es la base de muchos procesos que ocurren de manera casi natural en el campo de la Informática (bases de datos, inteligencia artificial, estructuras de datos, redes, entre otros).

Uno de los objetivos más importantes dentro de las carreras de enseñanza de la matemática es ayudar a comprender a nuestros estudiantes que existen múltiples aplicaciones de temas que, muchas veces, son solo tratados de manera algebraica y de cálculo, y no se conciben aplicaciones.

Lo anterior es fundamental si se desea que estos futuros profesores motiven a sus estudiantes para que construyan una matemática útil y con gran relevancia en nuestra sociedad.

Por esta razón, no se omite admitir que existen variados métodos para hacer los cálculos que se exponen y con mayor eficiencia en términos de velocidad de respuesta en los programas.

Por último, no se puede esperar que el estudiante de enseñanza de la matemática termine sus estudios sin saber resolver problemas. Es por esto que no se debe limitar al estudiante al conocimiento por sí mismo en cada curso, sino que pueda comprender que la integración de su conocimiento puede engendrar productos de mucha valía en otras áreas.

Durante la implementación de los procesos recursivos matemáticos, el lenguaje Scheme demuestra que es una herramienta muy útil para realizar cálculos basados en este tipo de rutinas.

Bibliografía

[Ba96] H, Bayley. “The Quest for Pi.”. `http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970009342_1997010288.pdf`. 2008.

[CN07] CNICE. “El número Pi”. `http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm`. 2007.

[De88] B, Demidovich. *“Cálculo numérico fundamental”*. Editorial Paraninfo S. A. 1988.

[La06] V, Lampret. *“Even from Gregory-Leibniz series* π *could be computed: an example of how convergence of series can be accelerated”*. University of Ljubljana, Slovenia. 2006.

[Mo08] Y, Morales. *“Lenguajes funcionales de cómputo como herramientas digitales en la enseñanza aprendizaje de la matemática”*. CONAMEP. 2008.

[Si02] G, Simmons. *“Cálculo y Geometría Analítica”*. Editorial Mc Graw-Hill. 2002.

[Sm47] G, Smith. *“Calculus”*. Editorial John Wiley and Sons. 1947.

[St02] J, Stewart. *“Cálculo: trascendentes tempranas”*. Editorial Thomson Learning. 2002.

[Th98] G, Thomas. *“Cálculo: una variable”*. Editorial Addison Wesley Longman. 1988.